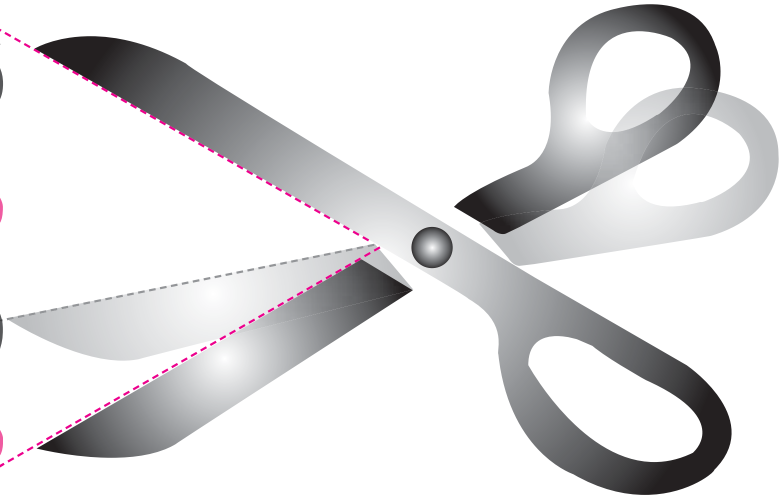
سیمین افروزان، دبیر ریاضی منطقهٔ ۲

قضیهٔ لولا در هندسه و اثبات آن در حسابان

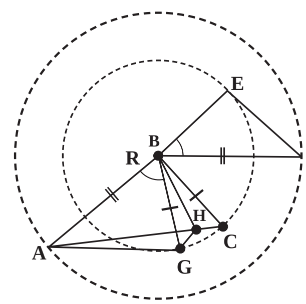


قضیهٔ لولا

اگر در دو مثلث دو ضلع یک زاویه، نظیربه‌نظیر برابر باشند و زاویهٔ بین آن دو ضلع در مثلث اول، بزرگ‌تر از زاویهٔ نظیرش در مثلث دوم باشد، ضلع سوم مثلث اول که روبه‌روی زاویهٔ بزرگ‌تر است، از ضلع سوم مثلث دوم که روبه‌روی زاویهٔ کوچک‌تر است، بزرگ‌تر خواهد بود.

$$AB = BD, BC = BE, A\hat{B}C > EB\hat{D} \Rightarrow AC > ED$$

توجه کنید که فرض و حکم قضیه با توجه به شکل ۱ نوشته شده است. در این شکل دو رأس از هر مثلث روی دو دایرهٔ هم مرکز قرار گرفته و زاویهٔ مورد بحث مرکز این دو دایره است. تساوی ضلع‌های موردنظر قضیه با توجه به تساوی شعاع‌های یک دایره بهتر دیده می‌شود و ضمناً ثابت می‌شود که هرچه زاویهٔ B بزرگ‌تر شود، ضلع مقابلش هم بزرگ‌تر خواهد بود.[1]

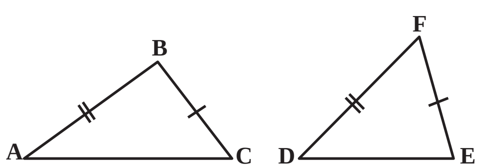


شکل ۱.

برهـان: مثلـث ABG، هم‌نهشـت بـا مثلـث BED را در نظر می‌گیریـم (مثـل این اسـت که یک کپـی از مثلـث BED در موقعیت جدید سـاخته‌ایم تا مقایسـهٔ ضلع سـوم آن‌ها آسان‌تر شـود). از H پای نیمسـاز زاویهٔ GBC به G وصل می‌کنیم تا دو مثلث هم‌نهشـت GBH و HBC به‌وجود آیند. با نوشتن نامساوی در مثلث AGH به حکم قضیه خـواهیم رسـید:

$$\overbrace{AH + \underbrace{HG}_{HC}}^{AC} > \underbrace{AG}_{ED}.$$

اثبـات جبری قضیهٔ لـولا به کمک قانون کسینوس‌ها

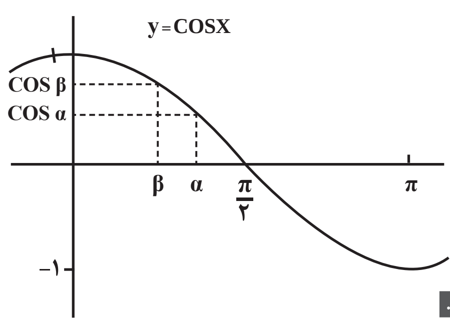


شکل ۲.

$$AB = FD, BC = FE, \hat{B} > \hat{F} \Rightarrow AC > ED$$

برهـان: اگـر $\underset{\alpha}{\hat{B}} > \underset{\beta}{\hat{F}}$، BC=FE=b و AB=FD=a، در این صورت طبق قانون کسینوس‌ها در هر مثلث داریم:

$AC^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\alpha$ و $DE^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos\beta$. چـون انـدازهٔ هـر کدام از زاویه‌های یک مثلث از ۱۸۰ درجه کمتر اسـت و مقدار کسینوس در فاصلهٔ صفر تا ۱۸۰ درجه نزولی است، یعنی با زیاد شدن زاویه مقدارش کم می‌شود، لذا از $\alpha>\beta$ داریم: $\cos\alpha<\cos\beta$ (شکل۵).



شکل ۳.

از آنجا که a و b اعداد مثبتی هستند، پس: $2ab\cos\alpha<2ab\cos\beta$ و در نتیجه: $AC^2>ED^2$، یعنی: $AC>ED$.

بیان دیگری از قضیهٔ لولا

اگــر در یک مثلث، زاویهٔ بین دو ضلع دلخواه را افزایش دهیم، ضلع سوم نیز افزایش می‌یابد. به‌همین ترتیب، کاهش زاویهٔ بین آن دو ضلع موجب کاهش ضلع مقابل می‌شود.

اثبات قضیهٔ لولا به کمک آهنگ تغییر

اثبات قضیه را با حل مسئله‌ای که در کتاب حسابان آمده است، دنبال می‌کنیم:

مثلثی ســاخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می‌باشد و زاویهٔ بین این دو ضلع α اســت که قابل تغییر از صفر تا π رادیان اســت. طول ضلع سوم را l بنامید.

الف) l را برحسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ب) α را برحســب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه‌ای با هم دارند؟

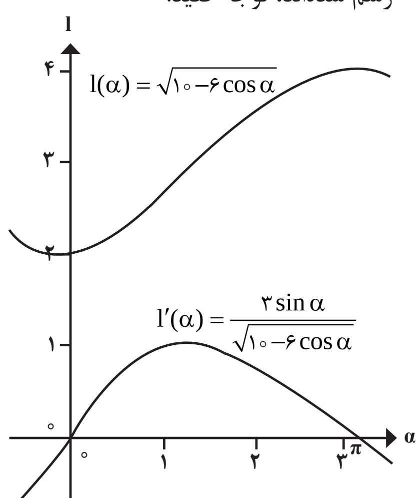
حل الف)

$$l^2=1^2+3^2-2\times3\times\cos\alpha=10-6\cos\alpha$$

$$\Rightarrow l(\alpha)=\sqrt{10-6\cos\alpha}$$

$$l'(\alpha)=\frac{6\sin\alpha}{2\sqrt{10-6\cos\alpha}}=\frac{3\sin\alpha}{\sqrt{10-6\cos\alpha}}>0$$

مثبــت بــودن آهنــگ تغییر نشــان می‌دهــد که بــا افزایش زاویــهٔ α، l یعنی ضلع روبه‌رو نیز افزایش پیدا می‌کند. این نشــان می‌دهد که $l(\alpha)$ صعودی است. به شکل ۶ که $l(\alpha)$ و مشتق آن در بازهٔ $0<\alpha<\pi$ رسم شده‌اند، توجه کنید:



شکل ۴.

اگر این مســئله را در حالت کلی حل کنیم، یعنی اضلاع مثلث را دو عــدد حقیقی مثبت دلخــواه a و b در نظر بگیریم، قضیهٔ لولا ثابت خواهد شد:

$$l'(\alpha)=\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}},\ 0<\alpha<\pi\Rightarrow l'(\alpha)>0$$

حل ب)

$$l^2-10=-6\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{10-l^2}{6}$$

$$\Rightarrow\alpha(l)=\cos^{-1}\left(\frac{10-l^2}{6}\right)$$

$$\Rightarrow\alpha'(l)=-\frac{\frac{-2l}{6}}{\sqrt{1-\left(\frac{10-l^2}{6}\right)^2}}=\frac{l}{3\sqrt{1-\left(\frac{10-l^2}{6}\right)^2}}$$

مثبــت بودن آهنگ تغییر نشــان می‌دهد که بــا افزایش ضلع l، α یعنی زاویهٔ روبه‌رو نیز افزایش پیدا می‌کند. بیان این مطلب در حالت کلی، اثبات عکس قضیهٔ لولا است:

$$\alpha'(l)=\frac{2l}{ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-l^2}{ab}\right)^2}}>0$$

پی‌نوشت‌ها

۱. شکل رسم شده حالت خاص نیست و خللی در اثبات قضیه در حالت کلی ایجاد نمی‌کند.

پرسش‌های بیکارجو!

هرگاه مجموع ارقام عدد 1396^{1396} مساوی n باشـد، باقی‌مانـدهٔ تـقسیم 3^n بر ۲۶ کدام است؟

- الف) ۱
- ب) ۲
- ج) ۳
- د) ۴
- هـ) ۹